Opleiding: Middenkaderfunctionaris Bouw en Infra

Leerweg: BOL Niveau 4

Wiskunde 1-3

Periode 03

Opdrachten Week 05

Bijzondere lijnen

Uitwerking

Te behalen cijfers = NVT

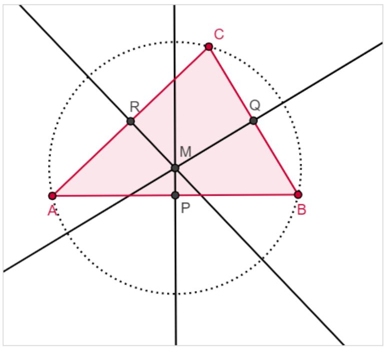
Naam: ______________________________

Klas: ______________________________

Datum: ______________________________

Uitleg 01

Je ziet hier **ΔABC** met daarin de drie middelloodlijnen van de zijden getekend. Die drie lijnen gaan door één punt **M**. Dit punt M is het middelpunt te zijn van een cirkel door de drie hoekpunten van die driehoek. Deze cirkel heet de **omgeschreven cirkel** van de driehoek.



Er zijn nog meer bijzondere lijnen in een driehoek...

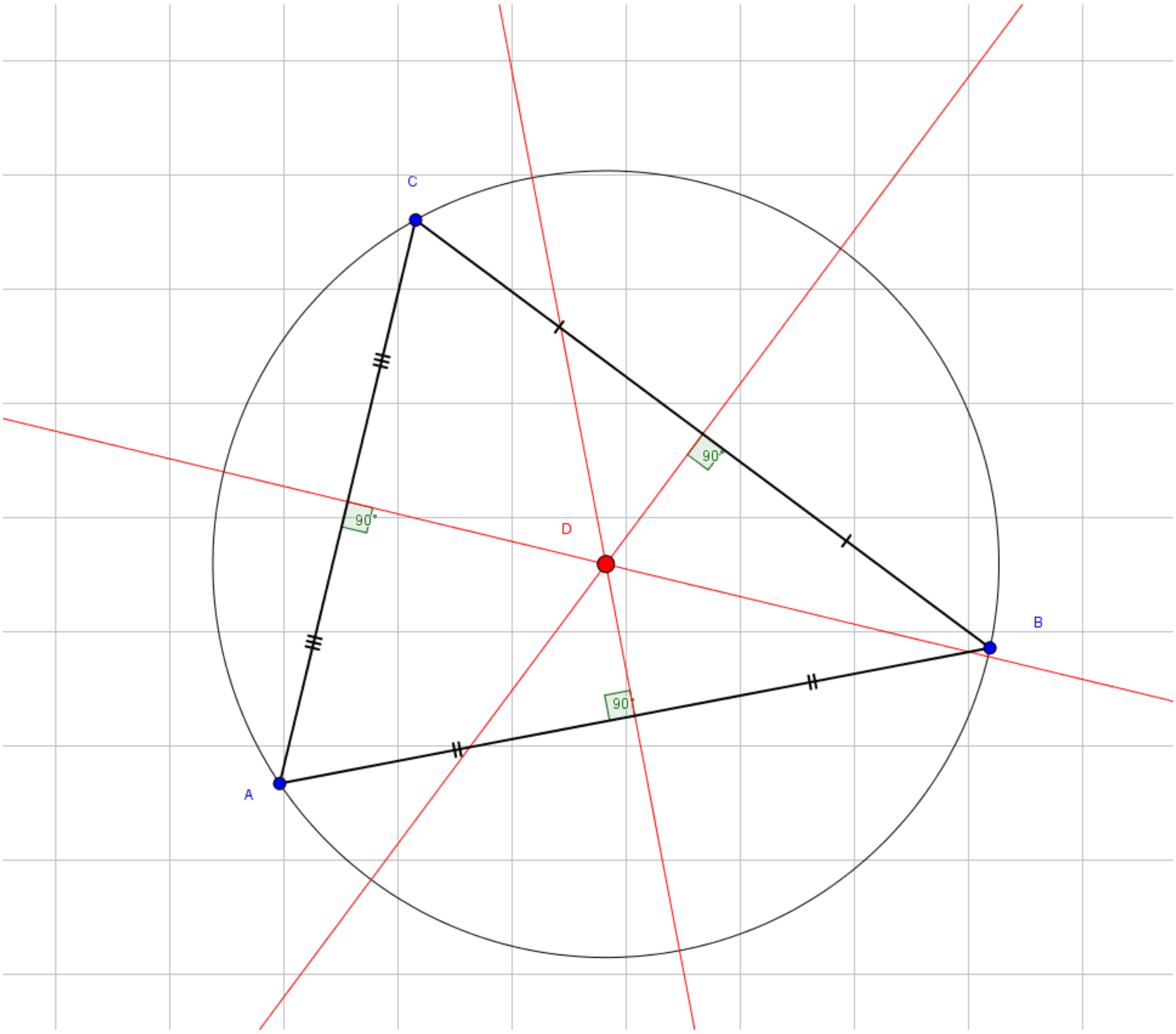
Opgave 01:

Bekijk in de Uitleg wat middelloodlijnen zijn.

a Teken een (niet al te kleine) driehoek ABC. Teken daarin de middelloodlijnen van elk van de drie zijden van de driehoek.

b Gaan de drie middelloodlijnen door één punt D?

c Je kunt een cirkel tekenen die precies om de driehoek past en D als middelpunt heeft. Ga dat in je figuur na, dit is de omgeschreven cirkel van ΔABC.



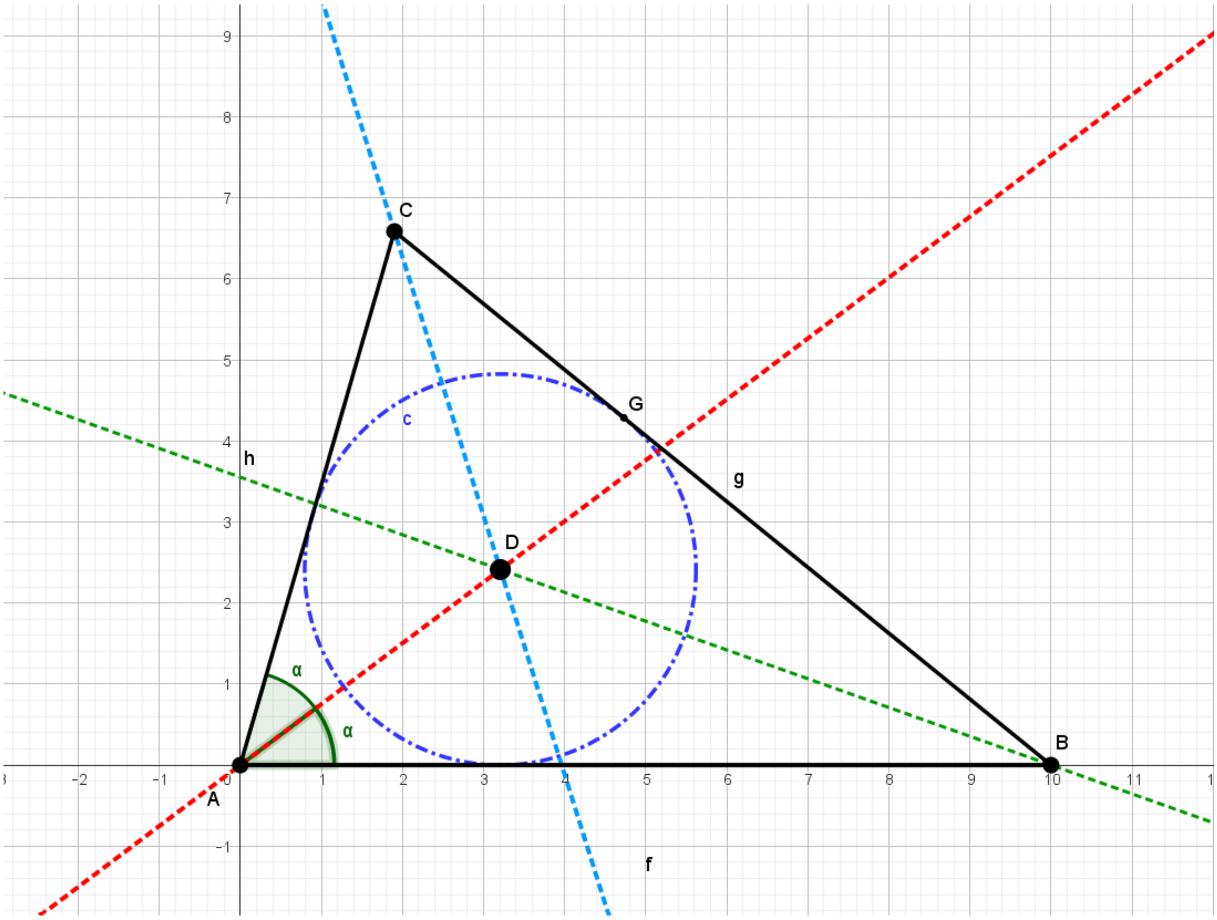
Opgave 02:

De deellijn of bissectrice van een hoek is een lijn die deze hoek in twee gelijke delen verdeeld.

a Teken een (niet al te kleine) driehoek ABC. Teken daarin de deellijnen van elk van de drie hoeken van de driehoek.

b Gaan de drie deellijnen door één punt D?

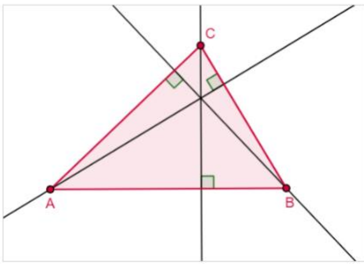
c Je kunt een cirkel tekenen die precies binnen de driehoek past en D als middelpunt heeft. Ga dat in je figuur na, dit is de ingeschreven cirkel van ΔABC.



Uitleg 02

Je ziet hier **ΔABC** met daarin de **drie hoogtelijnen**.

Ook die drie hoogtelijnen gaan door **één punt**, zelfs als twee hoogtelijnen niet binnen de driehoek vallen.



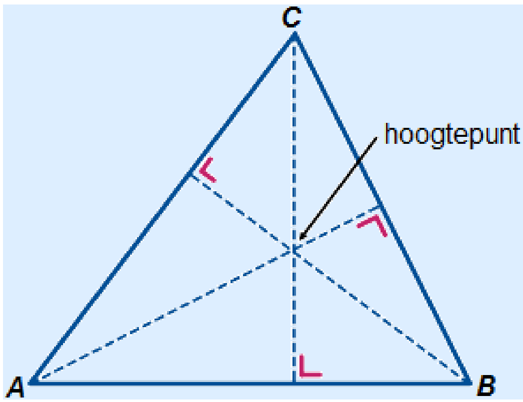
Opgave 03:

Bekijk de hoogtelijnen in uitleg 02.

a Teken zelf een driehoek met drie scherpe hoeken.

b Teken in je driehoek de drie hoogtelijnen.

c Gaan de drie hoogtelijnen door één punt?



Antwoord:

a Neem bijvoorbeeld driehoek ABC met $AB = 8$ cm, $AC = 7$ cm en $BC = 6$ cm.

b Doen, zie het voorbeeld.

c Ja, als het goed is wel.

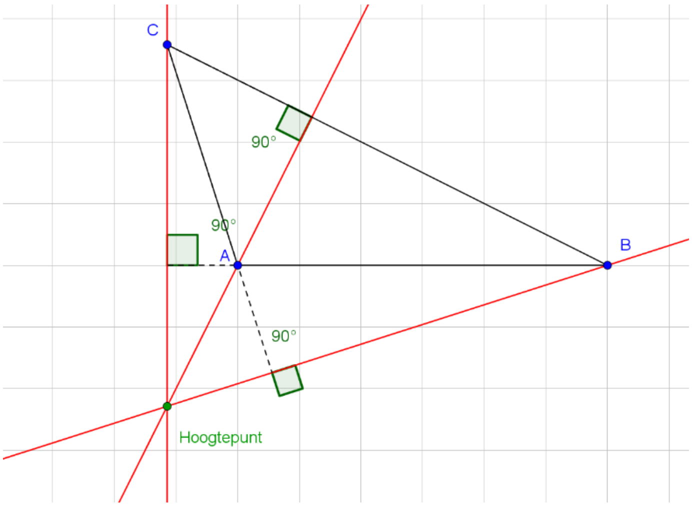
Opgave 04: Bekijk de hoogtelijnen in uitleg 02.

a Teken zelf een driehoek met één stompe hoek.

b Teken in je driehoek de drie hoogtelijnen. Je moet daartoe twee zijden verlengen.

c Gaan de drie hoogtelijnen door één punt?

Antwoord:



a Neem bijvoorbeeld driehoek ABC met $AB = 8$ cm, $AC = 5$ cm en $BC = 4$ cm.

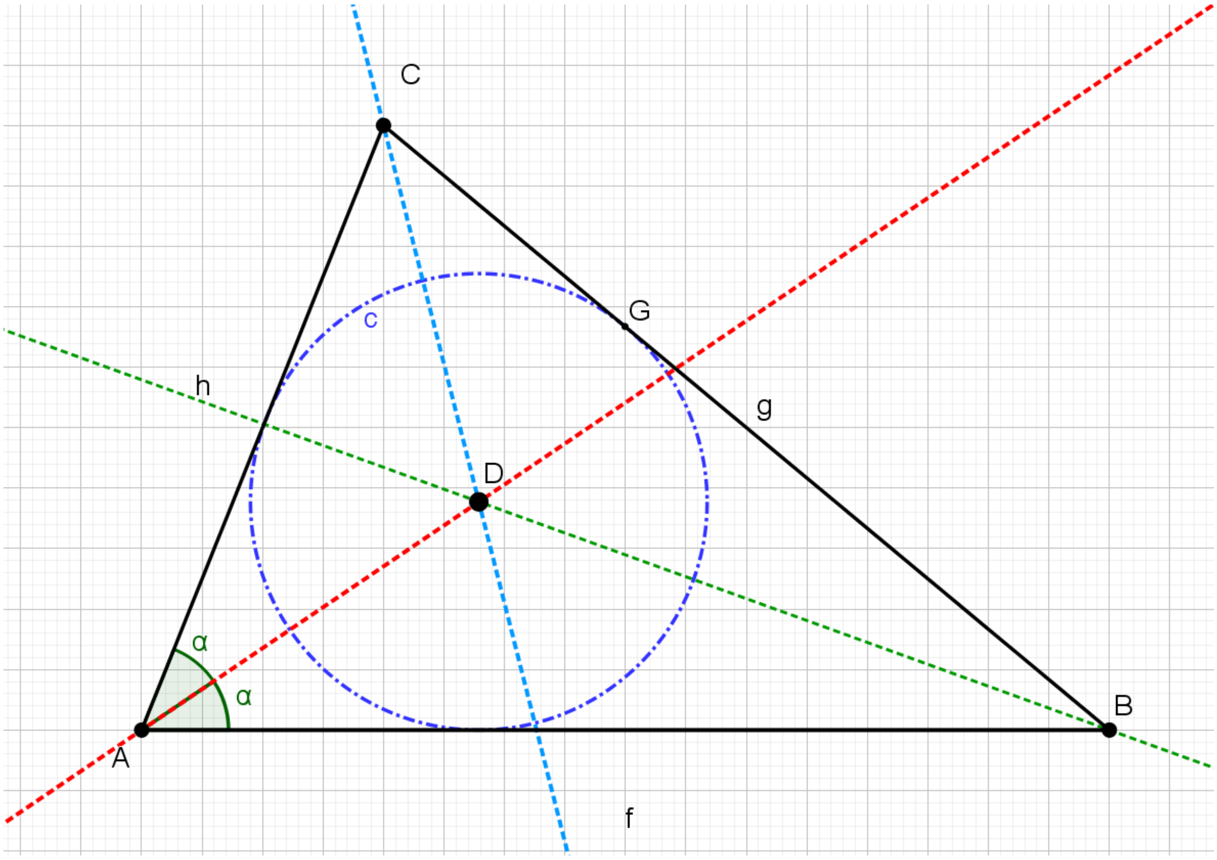
b Doen, twee hoogtelijnen liggen buiten de driehoek.

c Ja, als je ze langer maakt.

Opgave 05:

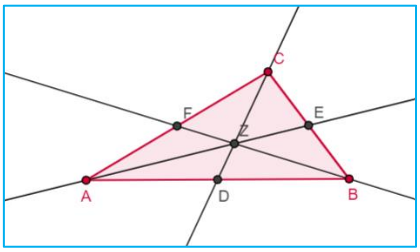
In elke driehoek ABC gaan de drie bissectrices door één punt.

Teken de ingeschreven cirkel van een ΔABC.



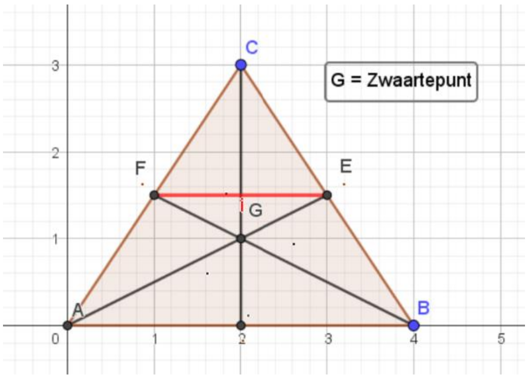
Opgave 06:

Je ziet hiernaast **ΔABC** waarin de drie zwaartelijnen zijn getekend.
Deze lijnstukken verbinden een hoekpunt met het midden van de overstaande zijde.
Hun snijpunt is **het zwaartepunt Z** van de driehoek.
Een opvallende eigenschap van het zwaartepunt is dat dit punt de zwaartelijnen in twee stukken verdeeld die de verhouding 2:1 hebben.



Laat dit zien met behulp van gelijkvormigheid.

Antwoord:



Teken lijnstuk EF.
Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ABC en FEC volgt $EF//AB$ en $EF = \frac{1}{2} \cdot AB$.
En daarom is $\Delta ABZ \sim \Delta EFZ$. De overeenkomstige zijden vormen dus een verhoudingstabel:

AB	BZ	AZ
EF	FZ	EZ

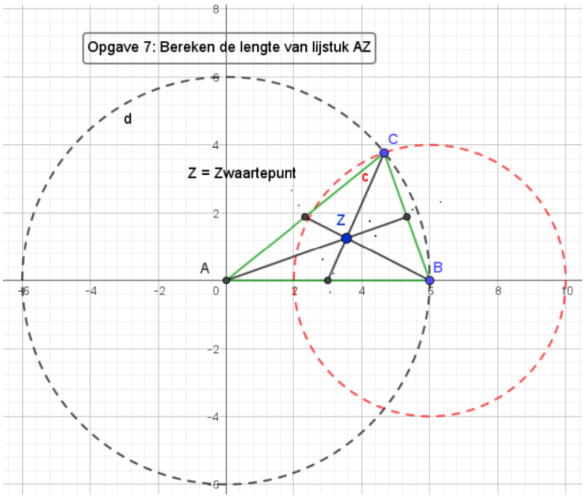
De vergrotingsfactor van ΔABZ naar ΔEFZ bedraagt $\frac{1}{2}$, dus $EZ = \frac{1}{2} \cdot AZ$ en $FZ = \frac{1}{2} \cdot BZ$. En dus is $AZ : EZ = BZ : FZ = 2 : 1$.

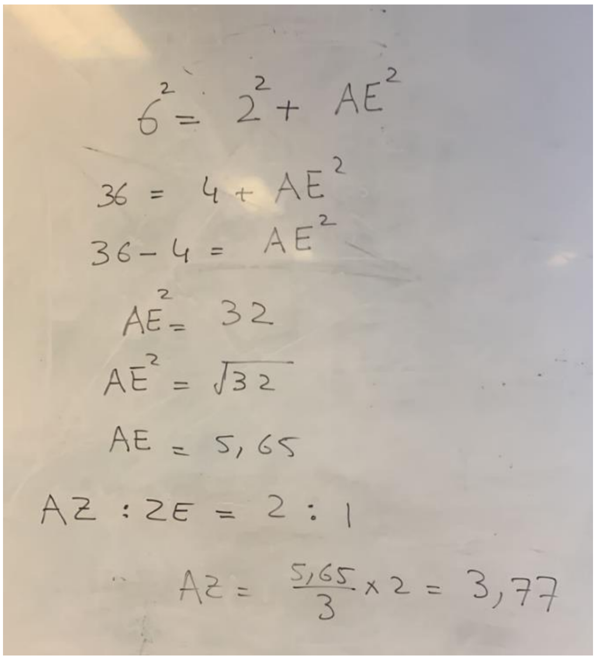
Opgave 07:

De stelling dat de zwaartelijnen in een driehoek elkaar verdelen in stukken die zich verhouden als $2:1$ kun je gebruiken bij meetkundige berekeningen.

Van een gelijkbenige driehoek ABC is $AB = AC = 6$ en $BC = 4$ cm. De drie zwaartelijnen snijden elkaar in punt Z.
Bereken de lengte van lijnstuk AZ.

Antwoord:





$6^2 = 2^2 + AE^2$

$36 = 4 + AE^2$

$36 - 4 = AE^2$

$AE^2 = 32$

$AE^2 = \sqrt{32}$

$AE = 5,65$

$AZ : ZE = 2 : 1$

$AZ = \frac{5,65}{3} \times 2 = 3,77$

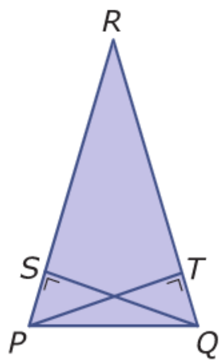
Maak eerst een schets van de situatie. De zwaartelijnen noem je AE, BF en CD.

Omdat de driehoek gelijkbenig is, is de zwaartelijn AE ook hoogtelijn, dus kun je de stelling van Pythagoras gebruiken: $AE^2 + 2^2 = 6^2$. Daarom is $AE = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

Omdat $AZ : ZE = 2 : 1$ is $AZ = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{2} = \frac{8}{3}\sqrt{2} \approx 3{,}77$.

Opgave 08:

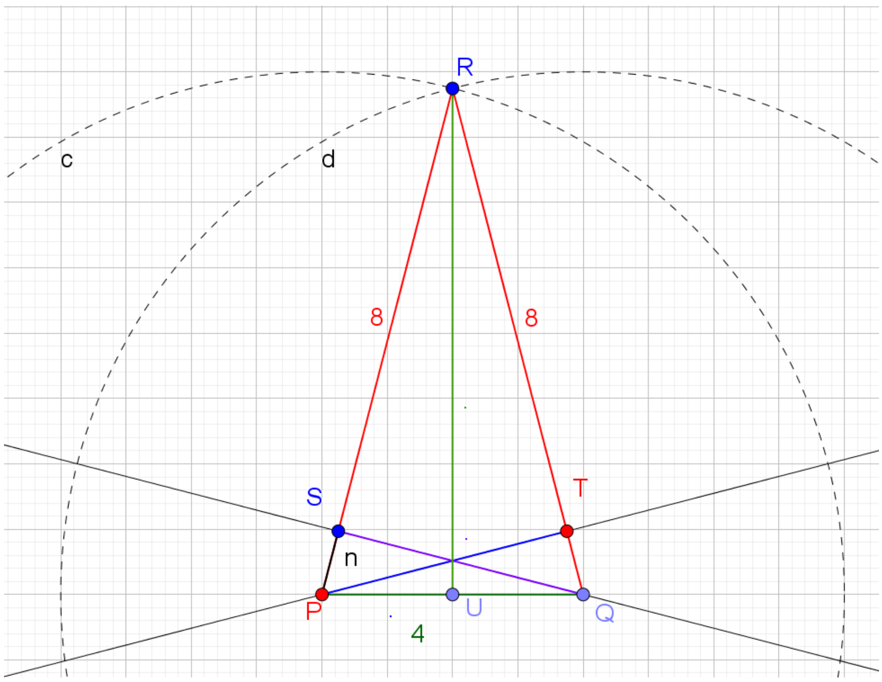
Je ziet hier een gelijkbenige driehoek PQR met de hoogtelijnen PT en QS. Verder is $PQ = 4$ en $PR = QR = 8$ cm.



a Teken deze driehoek en teken er de derde hoogtelijn RU bij in.

b Waarom is $\Delta PQS \sim \Delta PRU$?

c Bereken de lengte van alle drie de hoogtelijnen.



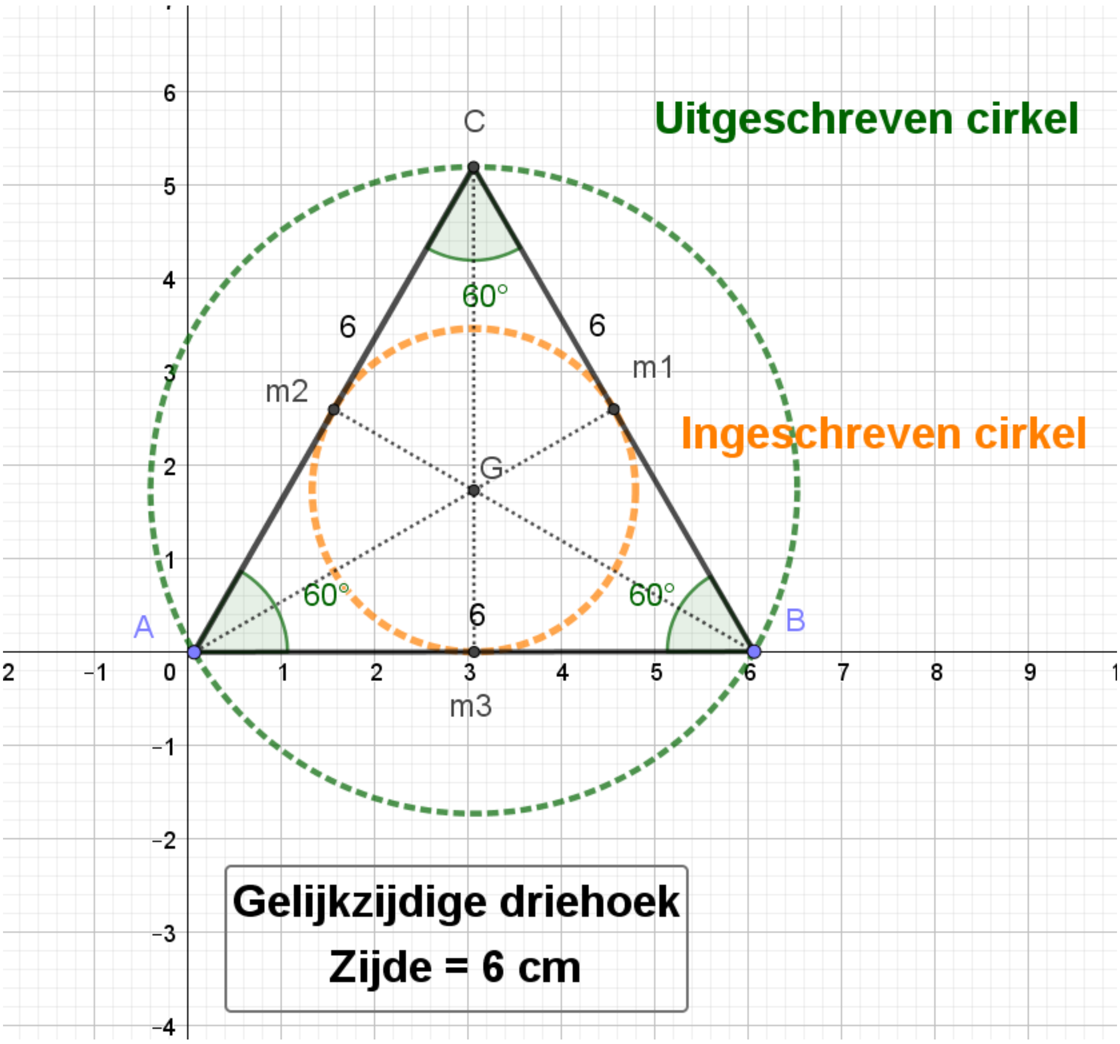
b Omdat $\angle P = \angle P$ en $\angle S = \angle U = 90^\circ$.

c Met de stelling van Pythagoras is $RU^2 + 2^2 = 8^2$ en dus $RU = \sqrt{8^2 - 2^2} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$. Vanwege de gelijkvormigheid (maak een verhoudingstabel) bij b is $QS = \frac{1}{2} \cdot RU = \sqrt{15}$. En de hoogtelijn PT is even lang.

Opgave 09:

Gegeven is een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden van 6 cm.

Teken van deze driehoek zowel de omgeschreven cirkel als de ingeschreven cirkel en bereken van beide de straal.



Opgave 10:

In een rechthoekige driehoek △PQR is ∠ Q = 90° ,PQ=12.
Verder is de zwaartelijn PT=13 cm. T is het middelpunt van lijn QR
De zwaartelijnen PT en RU snijden elkaar in Z.

a Maak een schets van de situatie.

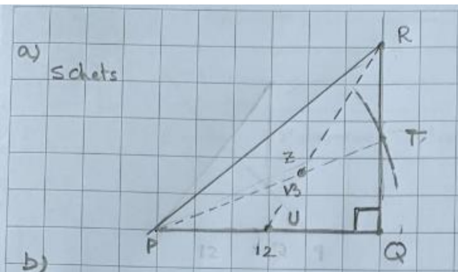
b Bereken de lengte van QR en UR.

c Bereken de lengte van lijnstuk UZ.

a Teken lijnstuk PQ=12 cm. Schets lijn QR met ,Q=90. Teken de zwaartelijnen PT erin m.b.v. een passer zie schets. T is de middelpunt van lijn QR dus QT=RT

b Omdat ΔPQT rechthoekig is, kun je de stelling van Pythagoras toepassen. Dus $QT=5$ cm. Dat betekent dat $QR=10$ cm. Met behulp van de stelling van Pythagoras vind je dan $RU=\sqrt{136}$.

a) Schets



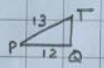
b)

△PQT

PQ = 12

PT = 13 schuine zijde

QT = ?



$13^2 = 12^2 + QT^2$ (Stelling van phythagoras)

$QT^2 = 13^2 - 12^2$

$QT^2 = 169 - 144$

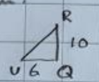
$QT^2 = 25$

$QT = \sqrt{25}$

$\boxed{QT = 5}$ dat betekend RT = 5 cm.

Dus QR = 10 cm.

△ UQR



UQ = 6

QR = 10

UR = ?

stelling van Phythagoras

$UR^2 = UQ^2 + QR^2$

$UR^2 = 6^2 + 10^2$

$UR^2 = 36 + 100$

$UR^2 = 136$

$UR = \sqrt{136} = 11,66$ cm

c) omdat RZ : UZ = 2 : 1 (Zwaartelijn)

Dus $UZ = \frac{1}{3} \cdot RU$

$= \frac{1}{3} \cdot 11,66$

$\boxed{UZ = 3,89 \text{ cm}}$